Dept. de Vibraciones y Aeroelasticidad 22-Ene-2014

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Número							

Apellidos	
Nombre	

PROBLEMA 3 (45 minutos)

CONTESTAR EN LA CARA OPUESTA. NO SE TENDRÁN EN CONSIDERACIÓN HOJAS ADICIONALES.

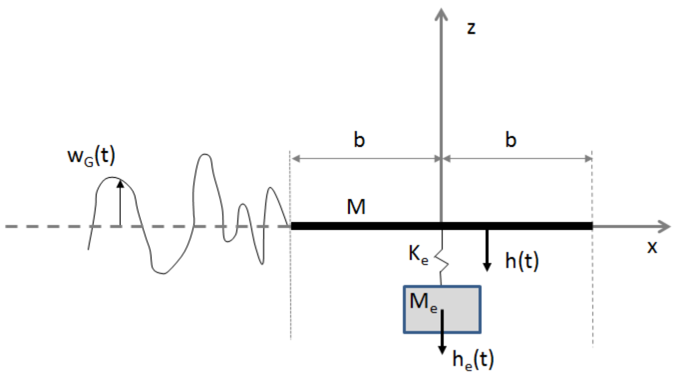
Enunciado: La figura inferior es un modelo de tunel construído para simular el efecto de la flexibilidad de la unión motor-ala en la respuesta a ráfaga.

El perfil tiene cuerda 2b y envergadura unitaria. La masa del perfil es M y la aerodinámica puede considerarse bidimensional e incompresible. El perfil tiene un sólo grado de libertad de desplazamiento vertical absoluto h (positivo hacia abajo).

El motor tiene masa M_e y la rigidez de la unión motor-ala es K_e, de forma que la frecuencia característica del modo de motor es $\omega_e = \sqrt{K_e/M_e}$. El motor tiene un sólo grado de libertad de desplazamiento absoluto vertical h_e (positivo hacia abajo) y no se consideran cargas aerodinámicas no estacionarias sobre él.

Se pide:

1. (2 puntos) Formular la ecuación dinámica de movimiento vertical del perfil y la de movimiento del motor en el dominio del tiempo, utilizando la variable adimensional $s = U_\infty t/b$.
2. (1 punto) Adimensionalizar la ecuación del movimiento del perfil dividiendo por $2\pi\rho_\infty U_\infty^2$. Deben aparecer los siguientes parámetros adimensionales: $\lambda = M/4\pi\rho_\infty b^2$, $\Lambda = M_e/M$ y $k_e = \omega_e b/U_\infty$.
3. (1 punto) Adimensionalizar la del movimiento del motor dividiendo por M_e y operar de forma que aparezca la variable adimensional k_e.
4. (2 puntos) Expresar las dos ecuaciones anteriores en el dominio de Laplace, denotando las transformadas de Laplace con una barra horizontal, es decir, $\bar{h}$, $\bar{h}_e$, $\bar{\Phi}$, $\bar{\Psi}$ y $\bar{w}_G$.
5. (2 puntos) Despejar la transformada de Laplace adimensional de la aceleración del perfil, es decir, $p^2\bar{h}/b$. La expresión final deberá escribirse tal y como se detalla en la nota 4 (ver abajo).
6. (2 puntos) Determinar la relación de aceleraciones entre motor y perfil en el plano de Laplace, es decir, la relación $\left(p^2\bar{h}_e/b\right) / \left(p^2\bar{h}/b\right)$. Comprobar dicha relación en los casos extremos de "motor desconectado" y "unión motor-ala infinitamente rígida".



NOTA:NOTA:

1. La sustentación (positiva hacia arriba) debido al movimiento del perfil viene dada por:
$L_M = +\pi\rho_\infty U_\infty^2 \left[\ddot{h}(s) + 2\int_0^s \ddot{h}(\sigma)\Phi(s-\sigma)\,d\sigma\right]$
2. La sustentación (positiva hacia arriba) debido a una ráfaga de intensidad w_G viene dada por:
$L_G = +2\pi\rho_\infty U_\infty^2 b \int_0^s (w_G(\sigma)/U_\infty)\Psi'(s-\sigma)d\sigma$
3. Nótese que, para la coordenada $h(t)$ tal y como se ha definido, las fuerzas generalizadas son $Q_{h(M)} = -L_M$ y $Q_{h(G)} = -L_G$.
4. Se demuestra que la aceleración adimensionalizada viene dada por la ecuación $\dfrac{p^2\bar{h}}{b} = -\dfrac{\dfrac{\bar{w}_G}{U_\infty}p\bar{\Psi}}{2\lambda + \dfrac{1}{2} + \bar{\Phi} + [...]}$. Si [...] se hace cero corresponde a perfil sin motor, es decir, las ecuación formulada en la clase de teoría.

SOLUCIÓN:

Apartado 1:

$$M\frac{U_\infty^2}{b^2}\ddot{h}(s)=K_e\left(h_e-h\right)-\pi\rho_\infty U_\infty^2\left[\ddot{h}(s)+2\int_0^s\ddot{h}(s)\Phi(s-\sigma)d\sigma\right]-2\pi\rho_\infty U_\infty^2 b\int_0^s\frac{w_G}{U_\infty}(\sigma)\frac{d\Psi}{d\sigma}(s-\sigma)d\sigma\rightarrow 1\text{ punto}$$

$$M_e\frac{U_\infty^2}{b^2}\ddot{h}_e=-K_e\left(h_e-h\right)\rightarrow 1\text{ punto}$$

Apartado 2:
La primera ecuación quedaría:

$$2\frac{M}{4\pi\rho_\infty b^2}\ddot{h}(s)=\frac{K_e}{2\pi\rho_\infty U_\infty^2}\left(h_e-h\right)-\frac{1}{2}\left[\ddot{h}(s)+2\int_0^s\ddot{h}(s)\Phi(s-\sigma)d\sigma\right]-b\int_0^s\frac{w_G}{U_\infty}(\sigma)\frac{d\Psi}{d\sigma}(s-\sigma)d\sigma$$

$$2\lambda\ddot{h}(s)=2\frac{K_e}{M_e}\frac{M_e}{M}\frac{M}{4\pi\rho_\infty b^2}\frac{b^2}{U_\infty^2}\left(h_e-h\right)-\frac{1}{2}\left[\ddot{h}(s)+2\int_0^s\ddot{h}(s)\Phi(s-\sigma)d\sigma\right]-b\int_0^s\frac{w_G}{U_\infty}(\sigma)\frac{d\Psi}{d\sigma}(s-\sigma)d\sigma$$

$$2\lambda\ddot{h}(s)=2\omega_e^2\Lambda\lambda\frac{b^2}{U_\infty^2}\left(h_e-h\right)-\frac{1}{2}\left[\ddot{h}(s)+2\int_0^s\ddot{h}(s)\Phi(s-\sigma)d\sigma\right]-b\int_0^s\frac{w_G}{U_\infty}(\sigma)\frac{d\Psi}{d\sigma}(s-\sigma)d\sigma\rightarrow 1\text{ punto}$$

Apartado 3:
La segunda ecuación se escribe como:

$$\ddot{h}_e=-\omega_e^2\frac{b^2}{U_\infty^2}\left(h_e-h\right)=-k_e^2\left(h_e-h\right)\Rightarrow\ddot{h}_e+k_e^2h_e=k_e^2h\rightarrow 1\text{ punto}$$

Apartado 4:
En el dominio del Laplace:

$$2\lambda p^2\bar{h}+\frac{1}{2}p^2\bar{h}+p^2\bar{h}\bar{\Phi}+2k_e^2\Lambda\lambda\left(\bar{h}-\bar{h}_e\right)=-b\frac{\bar{w}_G}{U_\infty}p\bar{\Psi}\rightarrow 1\text{ punto}$$

$$\left[k_e^2+p^2\right]\bar{h}_e=k_e^2\bar{h}\rightarrow 1\text{ punto}$$

Apartado 5:
Sustituyendo la ecuación segunda en la primera se obtiene:

$$\left[\left(2\lambda+\frac{1}{2}+\bar{\Phi}\right)p^2+2k_e^2\Lambda\lambda-2k_e^2\Lambda\lambda\frac{k_e^2}{k_e^2+p^2}\right]\frac{\bar{h}}{b}=\left[\left(2\lambda+\frac{1}{2}+\bar{\Phi}\right)p^2+2k_e^2\Lambda\lambda-\frac{2k_e^4}{k_e^2+p^2}\Lambda\lambda\right]\frac{\bar{h}}{b}=-\frac{\bar{w}_G}{U_\infty}p\bar{\Psi}$$

$$\left[2\lambda+\frac{1}{2}+\bar{\Phi}+\frac{2k_e^2}{k_e^2+p^2}\Lambda\lambda\right]\frac{p^2\bar{h}}{b}=-\frac{\bar{w}_G}{U_\infty}p\bar{\Psi}\Rightarrow\frac{p^2\bar{h}}{b}=-\frac{\frac{\bar{w}_G}{U_\infty}p\bar{\Psi}}{2\lambda+\frac{1}{2}+\bar{\Phi}+\frac{2k_e^2}{k_e^2+p^2}\Lambda\lambda}\rightarrow 2\text{ puntos}$$

Apartado 6:
La aceleración del motor se obtiene del apartado 2. La relación entre la aceleración del motor y la del perfil queda:

$$\ddot{h}_e=-\omega_e^2\frac{b^2}{U_\infty^2}\left(h_e-h\right)=-k_e^2\left(h_e-h\right)\Rightarrow\left(p^2+k_e^2\right)\bar{h}_e=k_e^2\bar{h}\Rightarrow\frac{p^2\bar{h}_e}{b}=\frac{k_e^2}{p^2+2k}\frac{p^2\bar{h}}{b}\Rightarrow\frac{p^2\bar{h}_e/b}{p^2\bar{h}/b}=\frac{k_e^2}{p^2+k_e^2}\rightarrow 1\text{ punto}$$

En el caso de motor desconectado ($k_e=0$), la aceleración del motor es nula, mientras que en el caso de unión motor-ala "infinitamente rígida" ($k_e\rightarrow\infty$), la relación queda $p^2\bar{h}_e/p^2\bar{h}\rightarrow 1$. Puntuación por estos dos casos límite: 1 punto